

Faculdade de Tecnologia de São Paulo – Fatec SP

Curso de Tecnologia em Materiais

Gabriella Omena Paschoal Sanches

SÓLITONS E A SUPERCONDUTIVIDADE

São Paulo

2021

Gabriella Omena Paschoal Sanches

SÓLITONS E A SUPERCONDUTIVIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Tecnologia em Materiais com ênfase em Cerâmica da Faculdade de Tecnologia de São Paulo como requisito à obtenção do título de Tecnólogo.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Regina Maria Ricotta

São Paulo

2021

Gabriella Omena Paschoal Sanches

SÓLITONS E A SUPERCONDUTIVIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Tecnologia em Materiais com ênfase em Cerâmica da Faculdade de Tecnologia de São Paulo como requisito à obtenção do título de Tecnólogo.

Banca examinadora:

Profa. Dra. Regina Maria Ricotta

Prof. Dr. Eraldo Cordeiro Barros Filho

Prof. Dr. Edson Moriyoshi Ozono

São Paulo

2021

RESUMO

Este trabalho baseia-se em um estudo teórico de ondas com soluções do tipo sóliton, um tipo de onda não linear e dispersiva, com o objetivo de compreender os fenômenos físicos e matemáticos. Primeiramente é feita uma introdução histórica e de definição sobre a descoberta das ondas do tipo sóliton e sobre a supercondutividade. Dois modelos com o tipo de solução sóltons são mostrados, Korteweg-de-Vries e Sine-Gordon. De modo que a primeira é citada a fim de conhecimento. Já a segunda é relacionada a uma junção supercondutora chamada Junção Josephson, em que possuem equações e soluções semelhantes com características solitônicas. Essa junção, a partir de certas características, tem propriedade solitônica, isso se torna promissor às suas aplicações pelo fato de não haver perda de transmissão por um longo caminho e a condutividade elétrica não sofre resistência pela característica supercondutora.

Palavras-chave: Sólitons. Supercondutividade. Junção Josephson. Fluxo quântico.

ABSTRACT

This undergraduate thesis is based on a theoretical study of waves with soliton-type solutions, variety of non-linear and dispersive wave, in order to comprehend the physical and mathematical phenomena. First, it is evidenced the history and definition about the discovery of soliton waves and how superconductivity works. Two models with the type of solution solution are presented, Korteweg-de-Vries and Sine-Gordon, the first is cited with a focus on knowledge and the second it is related to a superconducting junction called Josephson Junction, in which both have similar equations and solitonic solutions characteristics. This junction, from specific characteristics, has a solitonic property, which is promising for applications due to there is no transmission loss for a long way and the electrical conductivity is not resisted by the superconducting characteristic.

.

Keywords: Solitons. Superconductivity. Josephson Junction. Fluxon.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	6
1.1 SÓLITONS.....	6
1.2 SUPERCONDUTIVIDADE	7
2. KORTEWEG-DE-VRIES	8
3. SINE-GORDON.....	11
4. JUNÇÃO JOSEPHSON	15
4.1 JUNÇÃO PEQUENA.....	16
4.2 JUNÇÃO LONGA.....	19
5. SÓLITON E SUPERCONDUTIVIDADE	23
6. CONCLUSÃO	24
7. REFERÊNCIAS.....	25

1. INTRODUÇÃO

No mundo da física há ondas do tipo mecânicas, eletromagnéticas e de matéria, elas podem sofrer os chamados fenômenos ondulatórios como interferências, difração. Além desses fenômenos todas as ondas têm sua função, uma equação que demonstra sua forma, as quais podem ser lineares ou não lineares, dispersivas ou não dispersivas, há ainda as dissipativas, [1].

Neste trabalho o tipo de onda abordada será a do tipo sóliton, uma onda solitária dispersiva e não linear com propriedades específicas, Figura 1, que se propaga no meio supercondutor como em uma Junção Josephson a fim de obter uma solução da onda do tipo sóliton semelhante à equação de um fluxo magnético.



Figura 1 – Ondas solitárias e sólitons em um subconjunto. Fonte: Autor.

1.1 SÓLITONS

A onda solitária do tipo sóliton foi observada em agosto de 1834 pelo Scott Russell (1808-1882), um engenheiro civil e construtor de navios, vista em um canal ligando as cidades de Edimburgo (capital da Escócia) e Glasgow. Um barco em movimento rápido, carregado por dois cavalos, parou repentinamente e uma massa de água formou uma elevação solitária bem definida. Russell acompanhou o percurso da onda por aproximadamente 2 milhas (3,22km), observando que ela tinha uma velocidade de aproximadamente 8 mph (12,87km/h) mantendo sua forma preservada de comprimento, de uma extremidade a outra, 30 pés (9,144m) com 1 a 1,5 pés (3,28 a 4,92m) de altura, Russell nomeou o fenômeno como “Onda de Translação”, [2] [3].

Russell após sua observação reproduziu experimentos no laboratório a fim de gerar uma onda como vista no canal. Ele deduziu uma equação relacionando a

velocidade ao quadrado da onda solitária sendo igual a profundidade da água não perturbada mais a amplitude da onda, multiplicadas pela aceleração da gravidade, [3].

A onda observada por Russell foi contrariada por teorias como a de Airy que trata de ondas não lineares de águas rasas: com amplitude finita não se pode propagar sem mudar de forma. O problema foi resolvido por Joseph Boussinesq e, de forma independente, por Lorde Rayleigh, de modo que a não linearidade ao gerar aumento na velocidade e a dispersão diminuindo garante então a forma fixa da onda, mostrando também uma equação para o perfil da onda em termos de x e t , [2] [3].

Mais tarde Diederik Korteweg e Gustav de Vries trouxeram uma equação modelo descrevendo as ondas no meio hidrodinâmico chamada KdV. Uma outra equação para sólitons, mas no meio mecânico, foi a chamada Sine-Gordon com sua primeira aplicação na física por um trabalho de Frenkel em 1939, é essa equação que será relacionada com a corrente supercondutora da Junção Josephson [2] [4].

1.2 SUPERCONDUTIVIDADE

A supercondutividade foi descoberta há 110 anos por Heike Kamerlingh-Onnes (1853-1926). Em 1911 Onnes, após seus estudos de liquefação do gás hélio por alguns anos, investigou o comportamento da resistência elétrica em metais em baixas temperaturas; o mercúrio foi usado para a experiência pois era o metal da época mais fácil de obter com grau de pureza elevado. Ele observou uma queda na resistência do mercúrio, que tendia a zero, em uma temperatura em torno de 4,2K chamada de temperatura crítica (T_c) onde o material passa a ser um supercondutor, [5] [6].

Um material apresenta característica supercondutora quando é submetido a baixas temperaturas; na T_c a corrente elétrica pode fluir pelo material sem resistência, ou seja, a condutividade pode tender ao infinito nos materiais supercondutores, [7].

Para explicar esse fenômeno, em 1957 foi criada a teoria BCS (nome dado pelos seus criadores – John Bardeen, Leon Neil Cooper e John Robert Schrieffer), a qual descreve o que acontece nos supercondutores. A teoria diz que há atração dos

elétrons pela movimentação da rede através dos fônons, de modo que a deformação das cargas positivas sendo atraídas pela carga negativa do elétron deforma a rede cristalina e atrai outro elétron. Essa atração é feita por pares de elétrons que possuem energia suficientemente maior que a de gap para que haja interação, esses pares são chamados pares de Cooper, [5] [6].

Esses pares de Cooper são um condensados de dois elétrons que não obedecem à lei de exclusão de Pauli, o par possui uma mesma energia com spin inteiro, conhecido como bósons. A teoria BCS também mostra que na supercondutividade há uma relação com a massa atômica e a temperatura de modo que maior a massa atômica então maior a T_c e o gap quando maior, também maior a T_c , [5] [6].

Os tipos de supercondutores dependem do material utilizado, o tipo I: gerado a partir de um único elemento, possui T_c baixa e segue a teoria BCS; e o tipo II: ligas metálicas ou outros compostos, T_c alta. Em 1987 Bednorz e Müller ganharam o prêmio Nobel por criarem em 1986 um supercondutor de alta temperatura crítica, 30K, feito de material cerâmico de composição LaBaCuO (LBCO) de estrutura do tipo perovskita, [6] [7].

2. KORTEWEG-DE-VRIES

A equação modelo que Korteweg e de Vries descreve um modelo de propagação unidirecional de ondas em água com profundidade rasa e outros fenômenos não lineares e dispersivos, os sólitons hidrodinâmicos, [2] [4].

A equação (2.1) descreve a propagação de uma onda livre cuja solução é dada por (2.2) uma combinação linear unidimensional de duas ondas f e g que se movem em sentidos contrário, sendo cada uma delas solução da equação (2.1), [3].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (2.2)$$

Adotando a função g igual a zero, tem-se apenas uma onda f que se propaga no eixo x em direção ao sentido positivo.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

Usando a seguinte notação: $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$ e $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$, a equação é simplificada para,

$$u_t + v u_x = 0 \quad (2.4)$$

e a solução é dada por (2.5), [3].

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (2.5)$$

Adota-se $v=1$, a equação (2.4) pode ser modificada para mais detalhes físicos da onda, tendo então uma equação de onda do tipo dispersiva (2.6),

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.6)$$

Adotando-se a solução como uma equação de onda harmônica (2.7), [3].

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.7)$$

Verifica-se que a solução é aceita se a frequência ω for igual a $k - k^3$, que é obtida a partir das substituições da solução (2.7) em (2.6), em que k é o número de onda.

$$u_t = e^{i(kx - \omega t)} \times (-i\omega) = -i\omega \times u(x, t)$$

$$u_x = e^{i(kx - \omega t)} \times ik = ik \times u(x, t)$$

$$u_{xxx} = (ik)^3 u_x = i^2 \times i \times k^3 \times u_x = -1ik^3 u(x, t)$$

$$u_t + u_x + u_{xxx} = ((-i\omega) + ik + (-ik^3))u(x, t) = 0$$

se $u(x, t)$ não é igual a zero, para a equação igualar a zero e ser verdadeira:

$$((-i\omega) + ik + (-ik^3)) = 0$$

$$\therefore \omega = k - k^3 \quad (2.8)$$

A equação (2.8) representa uma relação de dispersão, e com a (2.8) pode-se chegar à velocidade da onda descrita:

$$\omega = k - k^3; \quad c = \frac{\omega}{k}$$

$$c = \frac{k - k^3}{k} = 1 - k^2 \quad (2.9)$$

Isso mostra uma onda dispersiva, de modo que para diferentes números de onda (k) há uma velocidade também é diferente.

A derivada da velocidade c resulta em uma outra velocidade definida como uma velocidade de um pacote de onda,

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(k - k^3)}{dk} = 1 - 3k^2 \quad (2.10)$$

conhecida como velocidade de grupo, ela é formada de duas ou mais ondas com comprimentos diferentes que se somam criando momentos construtivos e destrutivos no movimento ondulatório. A Figura 1 representa o pacote de onda e a Figura 2 as diferentes velocidades.

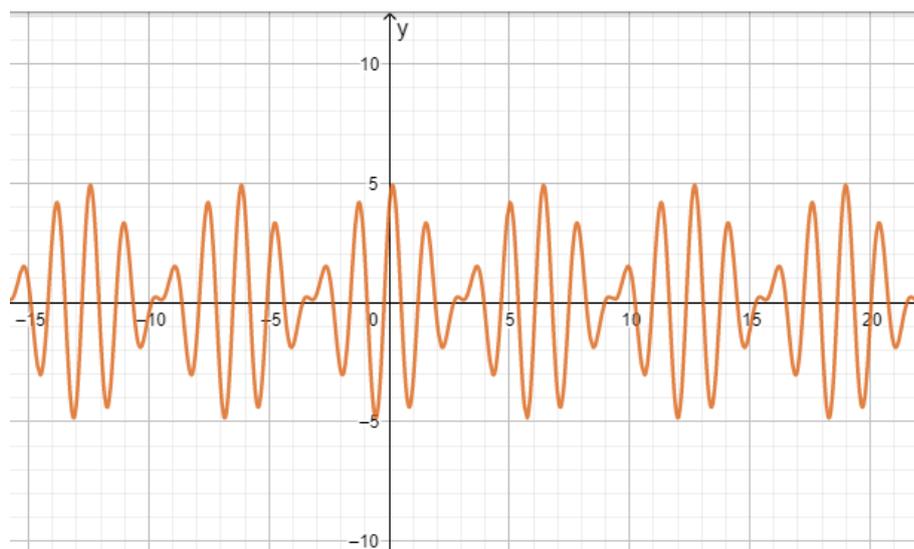


Figura 1 – Pacote de onda. Fonte: Autor.

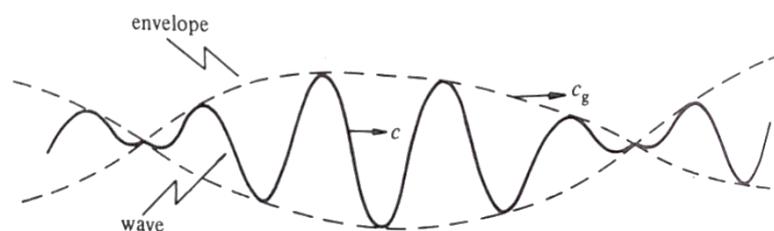


Figura 2 – Onda com velocidade c e com velocidade c_g . Fonte: Drazin.

Mostrado a onda dispersiva, equação (2.6), novamente pela equação (2.4) uma onda não linear é demonstrada, a velocidade c é igual a 1 mais u :

$$u_t + (1 + u)u_x = 0 \quad (2.11)$$

Com solução igual a:

$$u(x, t) = f\{x - (1 + u)t\} \quad (2.12)$$

Portanto, sabendo que a equação de KdV incorpora características de não linearidade e dispersão, a partir do estudo feito neste capítulo chega-se na equação de KdV (2.13), [3].

$$u_t + (1 + u)u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.13)$$

3. SINE-GORDON

A equação de Sine-Gordon (SG) traz soluções de ondas do tipo sólitons na parte mecânica sobre pêndulos conectados em uma mola como uma linha de transmissão mecânica, Figura 2.

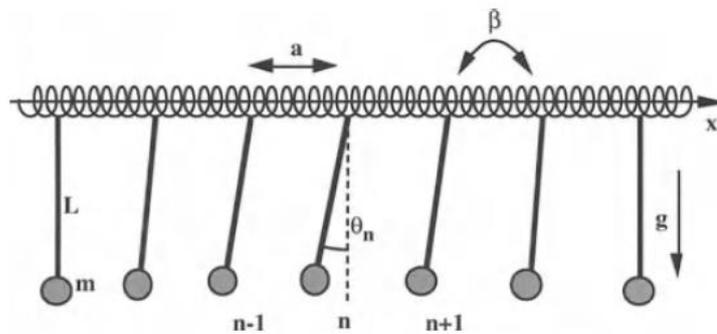


Figura 2 – Esquema de pêndulos acoplados em uma mola. Fonte: Remoissenet.

O sistema estudado por Scott em 1969 consiste em uma equação de torque resultante do torque gravitacional restaurador Γ_{1n} (que causa uma aceleração angular na massa) e do torque restaurador relativo ao acoplamento com pêndulos vizinhos Γ_{2n} , onde θ_n é o ângulo de rotação do n -ésimo pêndulo, I é o momento de inércia de um único pêndulo sendo a massa m e comprimento L , β é a constante de torque de uma seção da mola entre dois pêndulos e a é a distância da mola entre dois pêndulos, [2].

$$I \frac{d^2\theta_n}{dt^2} = \Gamma_{1n} + \Gamma_{2n}, \quad \Gamma_{1n} = -mgL \sin \theta_n, \quad \Gamma_{2n} = -\beta(\theta_n - \theta_{n+1}) + \beta(\theta_n - \theta_{n-1})$$

Para chegar na equação discreta de SG divide-se os termos todos pelo momento de inércia e são feitas substituições de alguns termos definidos na sequência:

$$-\beta(\theta_n - \theta_{n+1}) + \beta(\theta_n - \theta_{n-1}) = \beta(-2\theta_n + \theta_{n+1} + \theta_{n-1})$$

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{I}, \quad c_0^2 = \frac{a^2\beta}{I}$$

$$\frac{d^2\theta_n}{dt^2} = -\frac{mgL \sin \theta_n}{I} + \frac{\beta(-2\theta_n + \theta_{n+1} + \theta_{n-1})}{I}$$

$$\frac{d^2\theta_n}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \theta_n + \left(\frac{c_0^2}{a^2}\right)(-2\theta_n + \theta_{n+1} + \theta_{n-1})$$

$$\frac{d^2\theta_n}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta_n = \frac{c_0^2}{a^2}(-2\theta_n + \theta_{n+1} + \theta_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3.1)$$

Essa equação não pode ser resolvida de maneira analítica, portanto é feita uma aproximação para então chegar na equação de SG. O valor de θ_n foi aproximado como no caso da linha de transmissão elétrica $\theta(x,t)$, válida apenas para pequenas variações no ângulo de rotação [2].

$$\theta_n(t) \rightarrow \theta(x, t)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \omega_0^2 \sin \theta = \frac{c_0^2}{a^2} \times a^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (3.2)$$

Na equação os termos se referem à inércia dos pêndulos $\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)$, torque restaurador $\left(c_0^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)$ e torque gravitacional $(\omega_0^2 \sin \theta)$. A equação SG contém características de uma onda solitônica, dispersão e não linearidade, [2].

Usando a notação: $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \theta_{tt}$ e $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \theta_{xx}$, a equação (3.2) também pode ser escrita como:

$$\theta_{tt} - c_0^2 \theta_{xx} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (3.3)$$

A solução para a equação (3.2) é diferente para cada amplitude, se muito pequena o seno do ângulo é aproximadamente o próprio ângulo, ou seja, $\sin \theta \approx \theta$, e possui característica dispersiva, mas para amplitudes grandes se chama onda do tipo kink sóliton, [2].

Para amplitude pequena a equação é chamada Klein-Gordon (KG) dada por

$$\theta_{tt} - c_0^2 \theta_{xx} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (3.4)$$

supondo a solução do tipo

$$\theta(x, t) = \theta_0 \cos(kx - \omega t) \quad (3.5)$$

derivando-se a solução

$$\theta_{tt} = -\theta_0 \cos(kx - \omega t) \omega^2$$

$$\theta_{xx} = -\theta_0 \cos(kx - \omega t) k^2$$

e substituindo na equação KG:

$$-\theta(x, t) \omega^2 + \theta(x, t) k^2 c_0^2 + \theta(x, t) \omega_0^2 = 0$$

$$(\theta_0 \cos(kx - \omega t))(-\omega^2 + k^2 c_0^2 + \omega_0^2) = 0$$

sendo que $\theta(x, t)$ é solução da equação (3.5) se

$$-\omega^2 + k^2 c_0^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\omega = \sqrt{k^2 c_0^2 + \omega_0^2} \quad (3.6)$$

A equação (3.6) é a relação de dispersão, quando $k > 0$ então há dispersão como mostra a Figura 3, se o $k=0$ a dispersão é igual à frequência de corte ω_0 mas se $k < 0$ a onda não se propaga, como é mostrado a seguir, [2].

$$\omega = \sqrt{0 + \omega_0^2} = \sqrt{\omega_0^2} = \omega_0$$

$$\omega = \sqrt{-k^2 c_0^2 + \omega_0^2}$$

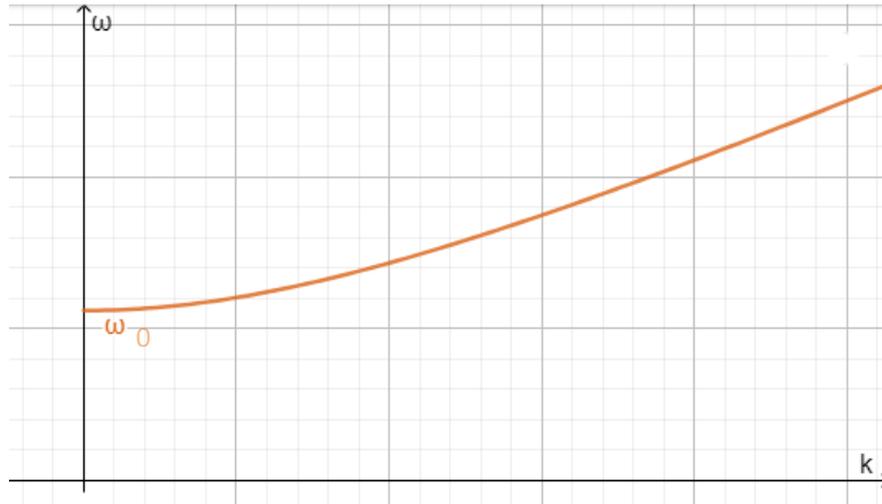


Figura 3 – Gráfico da equação (3.6), sem escala. Fonte: Autor.

Para grandes amplitudes a solução é do tipo kink, o valor de $\theta(x, t)$ passa a ser em função de X e T , como mostrado a seguir

primeiro a equação é dividida por ω_0^2 :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} \text{sen } \theta = 0$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial (\omega_0 t)^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \left(\frac{\omega_0 x}{c_0}\right)^2} + \text{sen } \theta = 0$$

depois muda-se a variável:

$$\theta(x, t) \rightarrow \theta(X, T)$$

$$T = \omega_0 t, \quad X = \frac{\omega_0}{c_0} x$$

obtem-se então a equação de Sine-Gordon (3.7)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \text{sen } \theta = 0 \quad (3.7)$$

que tem como solução a equação (3.8), definida em termos de $s = X - uT$ e de uma velocidade u arbitrária:

$$\theta = 4 \arctg \left[\exp \left(\pm \frac{s - s_0}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right] \quad (3.8)$$

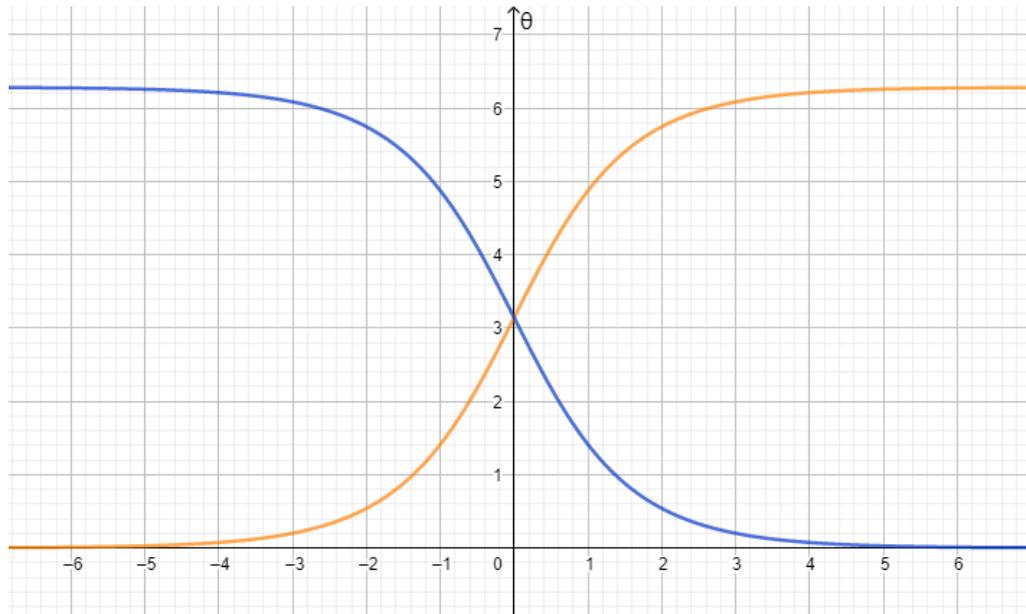


Figura 4 – Gráfico da onda $\theta(s)$ kink (laranja) e anti-kink (azul). Fonte: Autor.

A solução (3.8) representa uma onda solitária que pode viajar com velocidade $-1 < u < 1$. Cálculo numéricos de colisões entre tais ondas solitárias indicam que se trata de sólitons. Na solução (3.8) os sinais opostos indicam soluções que viajam em sentidos opostos, chamadas de sólito kink e sólito anti-kink, representados no gráfico da Figura 4 em função de s com $s_0 = 0$. À medida que s cresce de $-\infty$ a $+\infty$ os pêndulos oscilam de 0 a 2π radianos para o kink e 2π a 0 para anti-kink, [2].

4. JUNÇÃO JOSEPHSON

O efeito de tunelamento entre dois supercondutores foi previsto de maneira teórica em 1962 por Brian Josephson e comprovada de maneira experimental no ano seguinte por P. W. Anderson e J. M. Rowel. Esse efeito dá origem ao dispositivo conhecido como junção Josephson, um “sanduíche” de dois supercondutores S_1 e S_2 separados por uma camada fina (macroscópica) de espessura d , de um material dielétrico ou também conhecido como um material isolante que pode exibir estrutura de dipolo elétrico, Figura 5. Quando aplicada uma diferença de potencial (ddp) ocorre o tunelamento de partículas, resultando em uma corrente supercondutora, [2], [5], [8].

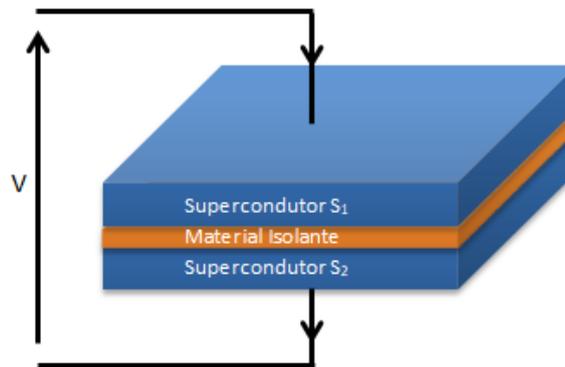


Figura 5 – Esquema de uma Junção Josephson pequena. Fonte: Autor.

O tunelamento é a probabilidade de elétrons livres penetrar a barreira de potencial e ultrapassar mesmo sem energia cinética suficiente. A espessura do material dielétrico está relacionada com esse efeito, de modo que a partir de 100Å o tunelamento ocorre por partículas de elétrons livres, no entanto na ordem de 30Å as partículas do tunelamento são os pares de Cooper, esse efeito é nomeado como tunelamento Josephson previsto em 1962, [2], [5].

4.1 JUNÇÃO PEQUENA

O estudo se inicia a partir da proposta de Richard Feynman em 1960, que descreve os pares de Cooper por uma função de onda definida pela equação (4.1.1) comum aos dois supercondutores, onde ρ é a densidade dos pares, ϕ é a fase quântica comum a todos os pares que estão no mesmo estado quântico, [2].

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\phi} \quad (4.1.1)$$

Aplicando uma ddp V entre os supercondutores a energia dos pares podem ser descritas como $E_1 = eV$ e $E_2 = -eV$, pois $E_1 - E_2 = 2eV$ em que $2e$ é a carga do par. As funções de onda dos dois supercondutores que formam a junção Josephson satisfazem o seguinte sistema de equações linearmente acopladas das equações de Schrödinger, [2].

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = E_1 \psi_1 + K \psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = E_2 \psi_2 + K \psi_1$$

em que E_1 e E_2 são valores da energia do estado fundamental dos supercondutores e K é um coeficiente real que descreve a interação de acoplamento entre os dois supercondutores e depende da estrutura da junção,

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = eV\psi_1 + K\psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -eV\psi_2 + K\psi_1 \quad (4.1.2)$$

onde $\hbar = h/2\pi$, h é a constante de Planck.

Substituindo-se a função de onda (4.1.1) nas equações de Schrödinger (4.1.2), chega-se em duas soluções para cada lado do supercondutor.

$$\hbar \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 2K\sqrt{\rho_2\rho_1} \sin(\phi), \quad -\hbar \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = K \frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}} \cos \phi + eV \quad (4.1.3)$$

$$\hbar \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = 2K\sqrt{\rho_2\rho_1} \sin(\phi), \quad -\hbar \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = K \frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2}} \cos \phi - eV \quad (4.1.4)$$

Da (4.1.3) e (4.1.4) é possível chegar em duas equações fundamentais do efeito Josephson. Assumindo que $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = J_1$, $\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = J_2$, $J_1 = J_2 = J$, e a densidade dos pares $\rho_1 = \rho_2 \approx \rho_0$, $\phi = \phi_2 - \phi_1$ tem-se a densidade de corrente J na junção e o resultado da derivada da fase no tempo, lembrando que $\hbar = h/2\pi$ h é a constante de Planck, [2].

$$J = \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_2\rho_1} \sin \phi = \frac{2K}{\hbar} \rho_0 \sin \phi = J_0 \sin \phi \quad (4.1.5)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} \quad (4.1.6)$$

As equações (4.1.5) e (4.1.6) são as equações básicas que descrevem o efeito Josephson.

É possível observar que uma corrente não nula é presente mesmo quando uma ddp for igual a zero, explicada pela (4.1.6), gera uma fase ϕ constante e consequentemente uma densidade de corrente J supercondutora contínua não nula, dada pela equação (4.1.5). Esse fenômeno foi o previsto por Brian Josephson.

Por outro lado, se uma tensão aplicada for constante, $V=V_0$, gera uma corrente supercondutora alternada, assim a equação de densidade de corrente

muda, pois a fase é somada à frequência vezes o tempo, a qual é obtida a partir da equação (4.1.6) que pode ser integrada e obtendo a fase dependente do tempo, $\phi_0 + \frac{2e}{h}V_0t$ e conseqüentemente uma densidade de corrente alternada dada por

$$J = J_0 \sin\left(\phi_0 + \frac{2e}{h}V_0t\right) \quad (4.1.7)$$

com uma fase igual a $\phi_0 + \frac{2e}{h}V_0t$ que oscila com frequência de oscilação dada por $\frac{f}{V_0} = \frac{2e}{h} = 483,6 \text{ MHz}/\mu\text{V}$.

Esses resultados implicam em uma medição de corrente de nível macroscópico através de uma diferença de fase quântica entre os supercondutores. Outro resultado é o comportamento da junção atuando como um indutor.

Na junção Josephson a diferença de fase quântica entre os dois supercondutores tem um significado macroscópico sendo possível medir diretamente a corrente que flui e a diferença de potencial através da junção.

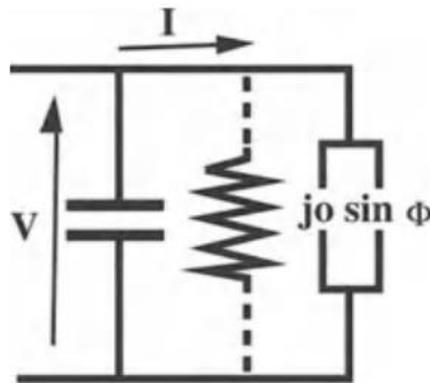


Figura 6 – Esquema elétrico de uma junção pequena. Fonte: Remoissenet.

Observa-se que tanto a diferença de fase ϕ quanto a corrente J dependem da diferença de potencial V aplicada. A junção Josephson tem o comportamento elétrico de um indutor não linear em paralelo com uma capacitância linear e uma resistência, Figura 6. As equações (4.1.5) e (4.1.6) apresentam efeitos de corrente alternada (CA) e corrente contínua (CC).

4.2 JUNÇÃO LONGA

Uma junção longa, Figura 7, e uma junção pequena são definidas pela profundidade de penetração de Josephson (λ_J), a qual será mostrada como uma medida da distância que a fase muda. Essa junção funciona como uma linha de transmissão elétrica, Figura 8, assim como os pêndulos acoplados que são uma linha de transmissão mecânica, [2].

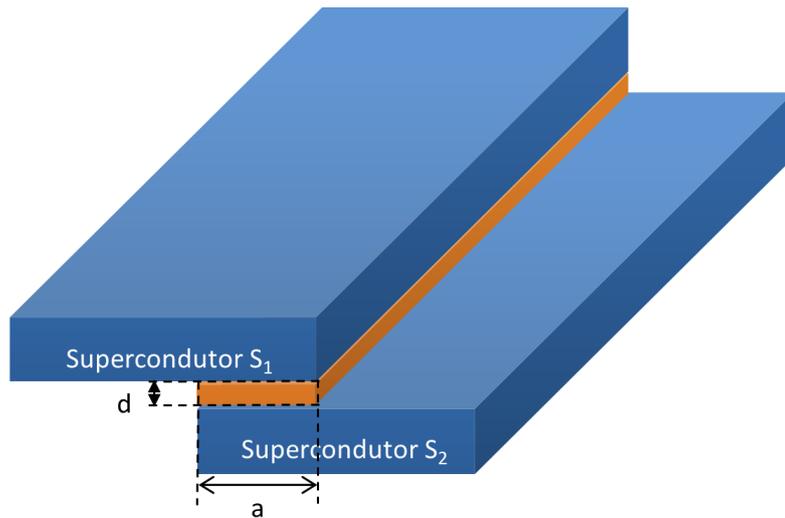


Figura 7 – Junção Longa. Fonte: Autor.

As equações fundamentais da primeira junção são usadas para chegar na equação que descreve a evolução do fluxo, análoga à de Sine-Gordon, [2].

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} \quad (4.2.1)$$

$$\Phi = \phi \frac{\hbar}{2e}$$

$$\Phi = \left(\frac{h}{2e}\right) \frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \phi$$

$$\phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (4.2.2)$$

Manipulando as equações (4.2.1) e (4.2.2) chega-se em outro valor para a fase:

$$\begin{aligned}\phi &= 2\pi \frac{\Phi}{\frac{h}{2e}} \\ \phi &= \frac{2\pi\Phi 2e}{h} \\ \phi &= \frac{\Phi 2e}{\hbar}\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

Assim é possível comprovar que a derivada parcial do fluxo magnético pelo tempo é igual à tensão.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \left(\frac{2e}{\hbar} \Phi \right)}{\partial t} &= \frac{2eV}{\hbar} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= V\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

Equações fundamentais na linha de transmissão:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\ell \frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -(j_1 + j_2)\tag{4.2.5}$$

$$\ell = \frac{\mu_0(2\lambda_L + d)}{a}\tag{4.2.6}$$

$$C = \epsilon_J \epsilon_0 \frac{a}{d}\tag{4.2.7}$$

O termo $j_1 \left(C \frac{\partial V}{\partial t} = C \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)$ corresponde à densidade de corrente no capacitor, $j_2 (J_0 \text{sen} \phi)$ a densidade de corrente no indutor, como visto anteriormente, a junção Josephson. A indutância ℓ é indutância por unidade de comprimento, a constante da permeabilidade do vácuo $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$ ($1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Wb/Am}$), e λ_L é o comprimento de penetração de London e d é a espessura do dielétrico. Já a capacitância C , ϵ_0 é a permissividade do vácuo igual a $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, ϵ_J é a constante dielétrica, uma razão entre permissividade do meio dielétrico pela permissividade do vácuo, [2] [8].

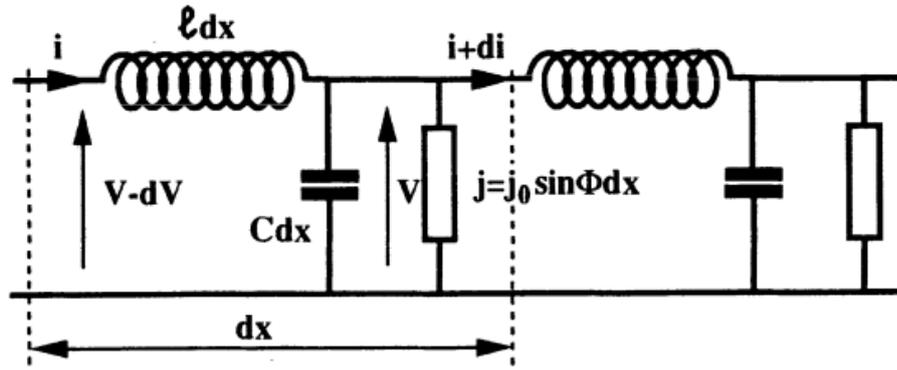


Figura 8 – Linha de transmissão Josephson. Fonte: Remoissenet.

As equações básicas para a linha de transmissão elétrica:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = V, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -(j_1 + j_2)$$

Substituindo-se V

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -L \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -L \frac{\partial i}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = -L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)$$

Integra-se esta última expressão em relação a t em ambos os lados e $\frac{\partial i}{\partial x}$ é substituído, em que L é a indutância,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = Lc \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + L J_0 \text{sen} \Phi$$

substituindo $v_j = (LC)^{-\frac{1}{2}}$, $\omega_j = (2\pi J_0 / \Phi_0 C)^{1/2}$ sabendo que $\Phi = \frac{\phi \Phi_0}{2\pi}$ obtemos a equação

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - v_j^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \omega_j^2 \text{sen} \phi = 0 \quad (4.2.8)$$

A equação (4.2.8) descreve a evolução da diferença de fase quântica ou como citado anteriormente a evolução do fluxo, uma equação semelhante à de Sine-Gordon citada.

Para pequenas amplitudes estáticas a segunda derivada no tempo se cancela e nas aproximações de pequenas oscilações, $\text{sen}\phi \cong \phi$.

$$\begin{aligned}
 -v_J^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \omega_J^2 \phi &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\omega_J^2 \phi}{v_J^2}, \quad \lambda_J = \frac{v_J}{\omega_J} \\
 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{1}{\lambda_J^2} \phi
 \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Com solução igual a:

$$\phi(x) \sim e^{\left(-\frac{x}{\lambda_J}\right)} \tag{4.2.10}$$

O termo λ_J é a chamada de penetração Josephson, uma medida de distância do que o fluxo magnético muda, chamada também como fase. Assim é possível distinguir uma junção curta de uma junção longa. Se as medidas geométricas do sistema são pequenas em relação a λ_J então é junção pequena, mas se as medidas geométricas forem grandes em relação à penetração Josephson então é longa, [2] [9].

Assim como no capítulo de Sine-Gordon foi obtida uma equação normalizada, (3.7), analogamente para a junção longa também é feito.

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{x}{\lambda_J}, \quad T = t\omega_J \\
 \frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{v_J^2}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\omega_J^2}{\omega_J^2} \text{sen}\phi &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \text{sen}\phi &= 0
 \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

5. SÓLITONS E SUPERCONDUTIVIDADE

A partir da última equação do capítulo anterior obtêm-se soluções para a linha de transmissão, as quais definem o fluxo magnético, a tensão e a corrente. Na junção Josephson longa o *fluxon*, quantização do efeito magnético no material dielétrico, é a própria onda do tipo sóliton, [2] [9].

$$\Phi = 4 \frac{\Phi_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - vt}{\lambda_J \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_J^2}}} \right) \right] \quad (5.1)$$

$$V = - \frac{\Phi_0 \omega_J}{2\pi} \frac{2v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_J^2}}} \operatorname{sech} \left(\frac{x - vt}{\lambda_J \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_J^2}}} \right) \quad (5.2)$$

$$i = - \frac{\Phi_0}{2\pi \ell \lambda_J} \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_J^2}}} \operatorname{sech} \left(\frac{x - vt}{\lambda_J \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_J^2}}} \right) \quad (5.3)$$

A solução (5.1) é do tipo sóliton kink e anti-kink em que o fluxo magnético Φ com uma velocidade v de modo que varia o ângulo de fase ϕ de 2π a -2π na barreira, [2].

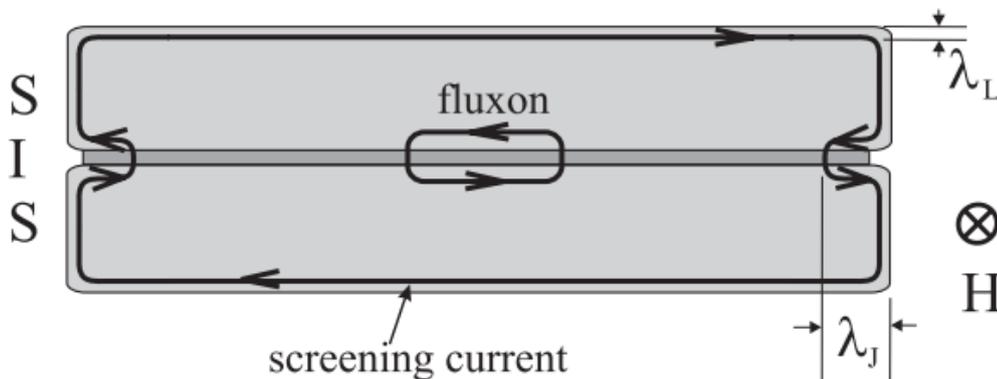


Figura 9 – Demonstração da corrente na junção. Fonte: Ustinov.

A Figura 9 representa as correntes na junção, sendo que H é um campo magnético externo, S é o supercondutor, I é o material dielétrico. Uma corrente nas bordas é gerada em loop, pela sua instabilidade também é gerada uma corrente conectando as duas barreiras a partir da junção chamada de vórtice de fluxo quântico, ou Josephson vórtice, essa corrente suporta $\Phi_0=2,064 \cdot 10^{-15}\text{Wb}$ de fluxo magnético. As soluções (5.2) e (5.3) são resultados da derivada parcial no espaço e no tempo, respectivamente, assim o sólton e antissólton são chamados de *fluxon* e *antifluxon* associado à pulso de tensão negativo e um pulso de corrente negativa que correspondem às derivadas espacial e temporal respectivamente da solução do fluxo, como mostrado na Figura 10, [2] [9].

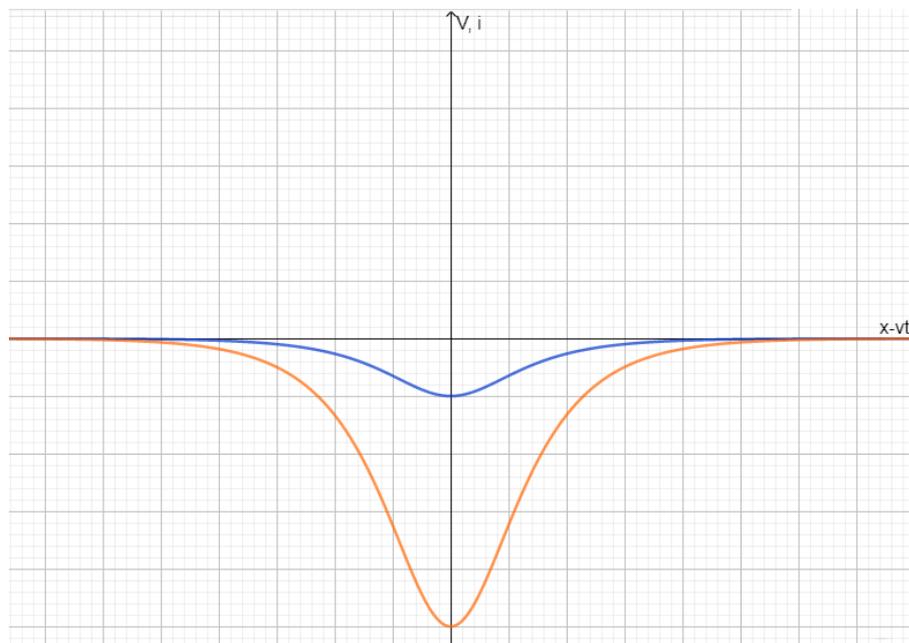


Figura 10 – Tensão V (azul), corrente i (laranja), sem escala. Fonte: Autor.

6. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou dois modelos do tipo sólton a fim de relacionar um deles, modelo Sine-Gordon, com a supercondutividade, onde está contextualizada na Junção Josephson. A equação de Sine-Gordon é semelhante à fase quântica que possui soluções solitônicas, ou seja, há características não lineares e dispersivas.

Os vórtices Josephson, como são chamados os fluxons, dão origem a uma ddp originada através da junção, que é onde ocorre o fenômeno das ondas do tipo sólton, resultando em uma estabilidade do fluxo magnético gerado.

O estudo teórico é importante diante dos avanços tecnológicos, de modo que ao entender o funcionamento do ponto de vista matemático e físico o tipo de aplicação e material para a fabricação serão melhores escolhidos. Squid é um tipo de Junção Josephson utilizada para captações de campos magnéticos, ele se encontra, por exemplo, em um equipamento médico para medir captações magnéticas do cérebro nomeada como magnetoencefalografia (MEG). Além de novas aplicações, outra ênfase promissora são os supercondutores cerâmicos que atuam em temperatura mais altas, como a do nitrogênio líquido o que pode gerar novas áreas de estudos a partir da análise e conhecimento feitos neste trabalho, [10] [11].

7. REFERÊNCIAS

- [1] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentos de Física – Gravitação, Ondas e Termodinâmica. Volume 2. 9ª edição.
- [2] REMOISSENET, M. Waves Called Solitons: Concepts and Experiments, 3rd Edition, Springer-Verlag, 1999.
- [3] DRAZIN, P. G., JOHNSON, R. S. Solitons: an introduction. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press, 1989.
- [4] L. C., Jarbas. Sólitos. Revista Brasileira de Física, vol. 10, Nº3, 1980. Disponível em: <<http://sbfisica.org.br/bjp/download/v10/v10a44.pdf>>.
- [5] COSTA, Marconi B. S, PAVÃO, Antônio C. Supercondutividade: um século de desafio e superação. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 34, Nº 2, 2012.
- [6] ROSA, Fabiano Mesquita da. Supercondutores. Disponível em: <www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20032/Fabiano/supercondutores.htm>.
- [7] BEDNORZ, J. Georg, MÜLLER, K. Alex. The Nobel Prize in Physics 1987. Disponível em: <<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1987/press-release/>>. Acesso em: 19 de outubro de 2021.
- [8] CALLISTER, W. D., Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução. 8ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

[9] USTINOV, A. V. Long Josephson Junctions and Stacks. Instituto de Física III, Universität Erlangen-Nürnberg, Erlangen, Alemanha.

[10] CLARKE, J. (1989). Principles and applications of SQUIDs. Proceedings of the IEEE, vol. 77, no. 8, August 1989.

[11] COLCLOUGH, M. S., Gough, C. E., Keene, M., Muirhead, C. M., Thomas, N., Abell, J. S., & Sutton, S. (1987). Radio-frequency SQUID operation using a ceramic high-temperature superconductor. Nature, 328(6125), 47–48.