

Etec Benedito Storani
Jundiaí - SP

Autor(es):

Vinicius Ricardo da Silva Alves

Orientador(a):

Prof. George Augusto Manzatto

Análise comparativa das formulações determinísticas e estatísticas do modelo dos gases ideais

RESUMO

As propriedades e relações físico-químicas dos gases são formuladas atualmente segundo os princípios da mecânica estatística, entretanto contrariando tal descrição adiciono elementos da Teoria dos Autômatos demonstrando matematicamente existência do movimento aleatório e quantificando porcentagem de partículas contidas num gás passíveis de associação à uma equação do movimento. O formalismo alternativo ao comprovar resultados citados anteriormente necessita descrever um sistema gasoso cuja forma varia, provindo nesta premissa condição para realização do cálculo da cota mínima dos produtos de reações químicas compostas por três ou mais substâncias, e demonstração da maior adequação dos métodos computacionais estatísticos em relação aos determinísticos no estudo dos gases.

Palavras-chave: Mecânica estatística. Teoria dos Autômatos. Movimento aleatório. Modelo de gases. Reação química.

1. INTRODUÇÃO

A termodinâmica principia-se dos axiomas da mecânica newtoniana, entretanto devido aos seus objetos disporem de inúmeras partes almejar realizar quaisquer formalizações determinísticas culminava em inviabilidades práticas. O tratamento estatístico dos sistemas termodinâmicos supriu dificuldades [1], porém impossibilitou quantificação das propriedades das partes do objeto; sendo tal restrição especialmente prejudicial na descrição cinemática pela pressuposição da incapacidade de associar equações do movimento a partículas termodinâmicas [2]. Contudo a redução crescente do tempo de processamento dos computadores assegura inutilidade do formalismo estatístico como resolução de incapacidades práticas [3]; portanto delimitar aplicações dos métodos computacionais estatísticos e determinísticos no estudo dos sistemas termodinâmicos não consiste em solucionar problemas práticos, mas comprovar quais propriedades do objeto são intrinsecamente probabilísticas ou determinística, e sob quais condições.

O presente artigo objetiva enumerar parcela das limitações computacionais na formalização de sistemas termodinâmicos através da descrição de sistemas gasosos ideais [4] cuja forma é variada. A demonstração da existência do movimento aleatório, quantificação das partículas contidas num gás movendo-se aleatoriamente, cálculo da quantidade mínima dos produtos de uma reação composta por três ou mais substâncias simples e comprovação da maior adequação do formalismo estatístico na descrição de gases, correspondem aos resultados almejados nesta pesquisa.

2. DESENVOLVIMENTO

1 Requisitos e definições

Os objetivos deste artigo abrangem inúmeros segmentos na análise de modelos, contudo aplicando a metodologia construtivista [5] soluciona-se tais problemáticas utilizando somente um método. Entretanto o meio não proporcionara as ferramentas de resoluções, sendo necessário ao leitor dispor

de conhecimentos básicos de termodinâmica, cálculo diferencial e integral, probabilidade, teoria da computação e teoria cinética dos gases.

Inúmeros objetos matemáticos e definições apresentam-se repetidamente na obtenção dos resultados propostos, portanto é vantajoso nas seções abaixo introduzir e definir rigorosamente esses enunciados e estruturas.

1.1 Autômatos finitos

Um autômato, máquina ou algoritmo segundo a Teoria dos Autômatos (TA) consiste numa estrutura matemática que possibilite descrever ou formular cenários representáveis por funções [6]. As categorias de máquinas relevantes aos objetivos desse artigo são autômatos finitos determinísticos (AFD) e autômatos finitos não-determinísticos (AFND).

Os AFD (como todo autômato) dispõem de um estado inicial q_0 análogo a uma constante, e um estado de aceitação q_1 equivalente a função $f(q_0) = q_1$. A transformação ou transição de q_0 em q_1 depende de variáveis denominadas “palavras”, e cujo conjunto de palavras nomenclatura-se “linguagem” [7,8].

As palavras são objetos matemáticos abstratos descritíveis na função $g(n) = p^n$ (1,2,3), sendo constituídas por “letras”. A letra (p) é uma estrutura fundamental, tal como o ponto geométrico, portanto indefinível [8], contudo, para fins didáticos pode o leitor considerá-la um x da função $f(x)$.

$$g(1) = p^1 = p \quad (1)$$

$$g(5) = p^5 = ppppp \quad (2)$$

$$g(n) = p^n = pppp \dots p \quad (3)$$

A transição de q_0 em q_1 formalmente é uma função composta de $g(n)$ e q_0 . Porém almejando simplificação adotarei $g(1)$ igual a linguagem (4), e elaborarei a função de transição de q_0 em q_1 na expressão (5).

$$\mathbb{L} = \{p\} \quad (4)$$

$$\delta_1 = \delta_1(q_0, p) = q_1 \quad (5)$$

O algoritmo determinístico necessário a realização dos objetivos propostos é denotada por $M_1 = (\mathbb{Q}, \mathbb{I}, \delta_1, q_0, \mathbb{F}_1)$. Sendo \mathbb{Q} o conjunto dos estados q_0 e q_1 , \mathbb{I} a reunião das palavras aceitas na função δ_1 , \mathbb{F}_1 o conjunto dos estados de aceitação.

A máquina não-determinística utilizada nos tópicos posteriores equivale ao autômato M_1 no conjunto \mathbb{Q} , \mathbb{I} e no estado inicial q_0 . Entretanto difere no conjunto \mathbb{F}_2 dos estados de aceitação (6), e na função de transição δ_2 (7).

$$\mathbb{F}_2 = \{q_0, q_1\} \quad (6)$$

$$\delta_2 = \delta_2(q_0, p) = q_0 \vee q_1 \quad (7)$$

A notação desse autômato é $M_2 = (\mathbb{Q}, \mathbb{I}, \delta_2, q_0, \mathbb{F}_2)$.

O processo de definição exposto acima origina propriedades e axiomas convenientes para maior compreensão dos resultados seguintes, por conseguintes estes são enunciados abaixo:

- O estado de aceitação é um elemento indispensável na formulação de quaisquer algoritmos. Uma máquina existe se e somente se sua função de transição ao processar uma palavra possui imagem no estado de aceitação [9].
- A função δ_2 aparentemente viola a regra de formação das funções por apresentar dois valores distintos para uma mesma variável, contudo essa conclusão é errônea devido a q_0 e q_1 serem iguais numericamente, porém representando diferentes estados [10].
- O autômato M_2 ao processar a palavra p assume o estado q_0 ou q_1 pela equivalência numérica dos estados, entretanto esses estados são distintos, provindo a probabilidade de 50% do autômato permanecer no estado q_0 ou assumir o estado q_1 , ou seja, a máquina detém dois possíveis resultados para um mesmo processamento [10].
- O gráfico das funções δ_1 e δ_2 inexistem em razão das mesmas não terem domínios contidos no conjunto dos números reais. Porém presume-se

neste artigo que quaisquer máquinas no estado q_0 disponham de imagem gráfica e no estado q_1 imagem gráfica diferente de q_0 .

1.2 Gases ideais

Os gases ideais ou modelo dos gases ideais são gases detendo relações entre pressão, temperatura e volume segundo a equação de Clapeyron, constituído por uma substância simples cujas partículas possuem volume desprezível, movem-se aleatoriamente, realizam colisões perfeitamente elásticas contra as paredes do recipiente contendo o gás e apresentam forças intramoleculares desprezíveis. Porém é conveniente realçar que o movimento aleatório existe enquanto presunção ou axioma para possibilitar a descrição estatísticas dos gases ideais, ou seja, inexistente fisicamente [11].

Os sistemas gasosos ideais serão classificados nos sistemas dispendo de recipiente de imagem gráfica (forma) constante ou variável no tempo. A alteração da forma do recipiente ocorre pela ação de um dispositivo regulado por um autômato M_1 ou M_2 ativado através da pressão exercida pelo gás nas paredes do recipiente.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

1 Movimento aleatório

A impossibilidade prática do registro das colisões entre moléculas gasosas propiciou postulação da existência do movimento aleatório das partículas compositoras de um gás, ou seja, inexistente equações cinemáticas capazes de descrever o deslocamento de moléculas gasosas [11]. Entretanto na seção seguinte será demonstrada existência matemática do movimento aleatório, portanto o deslocamento aleatório tornar-se a um fato físico, e não apenas um axioma.

1.1 Demonstração existência do movimento aleatório

A trajetória de qualquer partícula contida em um recipiente é dedutível pela soma das forças atuando sobre a molécula (8) [12]. A função (9) descreve o movimento de quaisquer partículas [13].

$$\vec{E} = \sum_{k=1}^{m \geq 1} \vec{e}_k$$

$$f(\vec{E})_1 = x_0 + v(\vec{E})$$

Admitindo um sistema gasoso detendo forma do recipiente regulada pela máquina M_1 e intervalos constantes $t > 0$ para realização dos comandos das atividades do autômato. Conclui-se variação do modulo $|\vec{e}_m|$ em razão do vetor \vec{e}_m representar a força gerada na colisão da molécula contra o recipiente, por conseguinte as alterações da forma do recipiente modificam o ângulo da colisão que se apresenta como fator determinante no cálculo do modulo $|\vec{e}_m|$. Os intervalos constantes e variações cíclicas da forma do recipiente possibilitam prever as imagens gráficas do recipiente e o valor de $|\vec{e}_m|$ no decorrer do tempo nas funções (10,11), provindo dedução da equação cinemática da partícula (12).

$$f(t_k)_2 = \begin{cases} \text{sistema de forma cubica, se } t_k/t \notin N \\ \text{Sistema de forma cilíndrica, se } t_k/t \in N \end{cases} \quad (10)$$

$$|\vec{e}_m| = \begin{cases} \beta, \text{ se } t_k/t \notin N \\ \gamma, \text{ se } t_k/t \in N \end{cases} \quad (11)$$

$$f(\vec{E})_1 = x_0 + v(\sum_{k=1}^{m-1} \vec{e}_k) + v(|\vec{e}_m|) \quad (12)$$

Porém um sistema gasoso dispondo de forma controlada pelo autômato M_2 impossibilita elaboração de funções análogas à (10,11) devido ao recipiente variar aleatoriamente de forma, ocasionando sequencias de valores do módulo $|\vec{e}_m|$ imprevisíveis. Sendo possível somente formular funções cinemáticas para descrever deslocamento anterior à colisão caso não se realize medições adicionais de posição, velocidade e aceleração, portanto mesmo conhecendo-se a posição inicial, velocidade e forças aplicadas na molécula seu movimento é imprevisível após determinada posição.

2. Quantificação das moléculas movendo-se aleatoriamente

Na seção anterior demonstrou-se existência do movimento aleatório, contudo tal prova não contém indícios da quantidade de moléculas deslocando-se aleatoriamente. A seção seguinte dispõe da dedução de uma fórmula capaz de possibilitar o cálculo da quantidade de moléculas em movimento aleatório num gás ideal.

2.1 Dedução da função de quantificação das moléculas movendo-se aleatoriamente

O movimento aleatório (conforme comprovado no tópico anterior) existe somente em um sistema cuja variação da forma do recipiente gera alteração do ângulo da

colisão molécula recipiente, portanto as partículas em movimento aleatório devem dispor de trajetórias que colidam com os diedros [14] incongruentes das formas assumidas pelo recipiente.

Pressupondo $k \geq 1$ diedros diferentes entre as formas do recipiente de igual altura $h > 0$. Traçando uma série de segmentos de reta cada qual com origem em um diedro incongruente e extremidade num ponto da superfície do recipiente. O produto do comprimento dos segmentos por h corresponde à área ocupada pelas moléculas que podem direcionar uma colisão contra os diedros (13)

$$\alpha hk > 0 \quad (13)$$

Multiplicando (13) pelo volume das partículas obtém-se volume do conjunto das moléculas. Entretanto tal expressão quantifica o volume de partículas cujas trajetórias não interceptam os diedros, sendo necessário presumir igual distribuição da quantidade de moléculas movendo-se no eixo z. Por conseguinte, um terço do volume de (14) corresponde efetivamente ao volume das partículas movendo aleatoriamente (15) [11].

$$\lim_{V(u) \rightarrow 0} V(u) \alpha hk \quad (14)$$

$$\lim_{V(u) \rightarrow 0} \frac{V(u) \alpha hk}{3} \quad (15)$$

O volume do recipiente ocupado pelas moléculas em deslocamento aleatório é descritível na razão (16).

$$\lim_{V(u) \rightarrow 0} \frac{V(u) \alpha hk}{3V(R)} \quad (16)$$

Entretanto uma formulação de maior elegância da expressão (16) expressar $V(u)$ em função do volume do recipiente. Assumindo (17) conclui-se (18) equivalente a (17).

$$V(u) = \frac{V(R)}{cN_A} \quad (17)$$

$$\frac{\alpha hk}{3cN_A} \quad (18)$$

Conhecendo o coeficiente estequiométrico da substância compósito do gás, se deduz trivialmente quantidade de partículas movendo-se aleatoriamente utilizando as relações de proporção (regra de três) envolvendo o número de Avogadro.

3. Quantificação da massa molar dos produtos das reações entre gases ideais

As moléculas gasosas ideais não exercem forças intramoleculares entre si quando contidas num recipiente. Entretanto reações químicas cujos reagentes são gases ideais de substâncias distintas dispõem de forças intramoleculares não desprezíveis, ocasionando dificuldades na elaboração de funções do cálculo da massa molar dos produtos da reação.

As seções posteriores desenvolvem fórmulas para a quantificação da massa molar mínima de cada produto de uma reação gasosa apresentando reagentes propagando-se em velocidades iguais e distintas em um mesmo espaço.

3.1 Dedução da função de quantificação da massa molar mínima do produto de reagentes gasosos que se propagam em velocidades iguais

Pressupondo uma reação composta por $r \geq 3$ reagentes em igual quantidade percorrendo numa mesma velocidade um vácuo de comprimento a para reagirem. As forças intramoleculares são desprezíveis em colisões no vácuo, portanto a distribuição da massa molar dos reagentes nas reações é uniforme. A razão (19) expressa massa molar de um reagente disponível para reagir com outro reagente.

$$\frac{\mathcal{M}(A)}{r-1} \quad (19)$$

Contudo $\mathcal{M}(A)$ é a massa molar total do reagente, ou seja, $\mathcal{M}(A)$ quantifica não somente as moléculas que colidiram primeiramente com o reagente. A solução desse problema consiste no produto de (19) pelo percentual da diferença de volume entre a abertura da saída de partículas e o recipiente que contém o gás A (20).

$$\frac{V(S)\mathcal{M}(A)}{V(R)(r-1)} \quad (20)$$

A probabilidade das moléculas dos gases A e B reagirem é (21). A massa molar mínima do produto $c_1A + c_2B$ correspondo a soma (22).

$$\mathcal{P}(A + B) = \mu \quad (21)$$

$$\left(\frac{V(S)\mathcal{M}(A)}{V(R)(r-1)} + \frac{V(S)\mathcal{M}(B)}{V(R)(r-1)} \right) \mu = \left(\frac{V(S)\mathcal{M}(A)}{V(R)(r-1)} + \frac{c_2V(S)\mathcal{M}(A)}{c_1V(R)(r-1)} \right) \mu = \frac{V(S)\mathcal{M}(A)\mu}{V(R)(r-1)} \left(1 + \frac{c_2}{c_1} \right) \quad (22)$$

3.2 Dedução da função de quantificação da massa molar mínima do produto de reagentes gasosos que se propagam em velocidades desiguais

Assumindo os postulados da seção anterior exceto a igualdade de velocidades dos reagentes gasosos. Conclui-se que uma série de somas de funções análogas a (22) em que k cresça de acordo com a adição de reagentes na reação

calculam a massa molar mínima caso conserve-se a quantidade dos reagentes A e B disponíveis para reagirem. Porém como ocorrem inúmeras reações de igual probabilidade μ , estabelece-se que após cada reação resta um percentual $(1 - \mu)$ de massa molecular dos reagentes A e B . O somatório (23) descreve a massa molar mínima de uma reação gasoso possuindo reagentes deslocando-se em velocidade desiguais.

$$\lim_{k \rightarrow r} \sum_{m=0}^{k \in N^*} \frac{V(S)M(A)(1-\mu)^m \mu}{V(R)(k-1)} \left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right) \quad (23)$$

4 Análise comparativa do modelo gasoso estatístico e determinístico

O modelo dos gases ideais e o modelo determinístico acerca do movimento molecular compartilham iguais premissas excetuando deslocamento aleatório das moléculas, portanto seus objetos equivalem-se, ocasionando indispensabilidade do modelo determinístico obter resultados da modelagem gasosa ideal devido a comprovação experimental de tais conclusões. A descrição determinística dos gases ideais conserva resoluções da formulação estatística como demonstrado no fato das equações cinemáticas moleculares não alterarem forças geradas e aplicadas nas partículas, contudo o modelo determinístico compõe-se de resultados adicionais e métodos distintos para elaboração das sentenças propiciando comparabilidade entre as modelagens na presente seção objetivando evidenciar maior adequação do modelo estatístico em relação ao modelo determinístico na formulação dos gases ideais.

A reprodutibilidade das propriedades gasosas ideais no modelo determinístico depende de dados empíricos acerca da forma assumida pelo sistema no período de análise, provindo requerimento superior de informações sistêmicas necessárias à aquisição das resoluções do modelo estatístico. Sendo acrescido nessa formulação divisão das moléculas nas partículas deslocando-se ordenada ou aleatoriamente.

Os resultados exclusivos do modelo determinístico abrangem somente o campo da cinemática rearranjando categoricamente um princípio em teorema, impossibilitando quaisquer avanços nas pesquisas físicas através de tais conclusões. O método de dedução das resoluções é desenvolvido segundo um formalismo que institui arbitrariamente imagens gráficas em funções, estabelecendo restrições de teoremas oriundos do modelo determinístico pelos seus fundamentos matemáticos não expressarem independente do cenário

empírico o objeto analisado, submetendo veracidade da modelagem a contingência de inúmeras situações experimentais.

As limitações metodológicas e insignificância dos resultados adicionais do modelo determinístico alicerçam ineficiência desta modelagem, possibilitando concluir maior conveniência e adaptabilidade do modelo estatístico na descrição dos gases ideais.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS OU CONCLUSÃO

Os objetivos propostos na introdução deste artigo realizaram-se no tópico “Resultados e discussões”, revelando proficiência significativa das modelagens determinísticas e estatísticas para formular e demonstrar propriedades das moléculas gasosas e gases ideais. Entretanto a inviabilidade da aplicação empírica do modelo determinístico funda questionamentos acerca de sua pertinência na qualidade de modelo, sendo essa problemática agravada pelo modelo estatístico dispor de ínfimas possibilidade para avanço nas pesquisas físicas [15], culminando na aparente irrelevância dos resultados e métodos desse artigo.

A conclusão da inutilidade dos modelos analisados nesse trabalho é verídica concebendo o modelo estatístico como meio de progresso nas pesquisas físicas, e o modelo determinístico como representação conceitual matemática; contudo invertendo os objetivos respectivos de cada modelo estabelece-se uma definição consistente dos gases ideais e um artifício limitado de desenvolvimento das teses físicas. As restrições de progresso científico do modelo determinístico são exuberantes, ocasionando indispensabilidade da formulação de novos métodos e modelos caso se proponha maiores descobertas dos fenômenos gasosos ideais.

5. REFERÊNCIAS

1. DE PINHO, Suani Tavares Rubim; DE PINHO, Suani Tavares Rubim. Evolução das Ideias da Termodinâmica e da Mecânica Estatística: 3 Mecânica Estatística. *In*: PONCZEK, Roberto Leon; DE PINHO, Suani Tavares Rubim; ROCHA, José Fernando Moura; JÚNIOR, Olival Freire; FILHO, Aurino Ribeiro. **Origens e Evolução das Ideias da Física**. 1. ed. Salvador: Editora

- da Universidade Federal da Bahia, 2011. v. 1, cap. 2, p. 160-163. ISBN 85-232-0254-4.
2. DE PINHO, Suani Tavares Rubim; DE PINHO, Suani Tavares Rubim. Evolução das Ideias da Termodinâmica e da Mecânica Estatística: 3.2.2 Trabalhos de Maxwell. *In*: PONCZEK, Roberto Leon; DE PINHO, Suani Tavares Rubim; ROCHA, José Fernando Moura; JÚNIOR, Olival Freire; FILHO, Aurino Ribeiro. **Origens e Evolução das Ideias da Física**. 1. ed. Salvador: Editora da Universidade Federal da Bahia, 2011. v. 1, cap. 2, p. 165-167. ISBN 85-232-0254-4.
 3. Cramming more components onto integrated circuits, Reprinted from Electronics, volume 38, número 8, abril 19, 1965, pp.114 ff.
 4. GASES ideais. Direção: Thiago C. Correra. Produção: Thiago C. Correra. Roteiro: Thiago C. Correra. Gravação de Thiago C. Correra. Salvador: Youtube, 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=wPTIB15VRjl&list=PLai6Q84hMEQ0gSnh3Gv_ASTmmQpxOdV9n&index=1&t=2510s. Acesso em: 8 ago. 2023.
 5. JANOS, Michel. Prova: Prova por dedução. *In*: JANOS, Michel. **Matemática e natureza**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. v. 1, cap. 3, p. 41-42. ISBN 978-85-7861-038-8.
 6. [TCOMP] Aula 1.1 - Introdução à Teoria da Computação. Direção: Felipe Louza. Produção: Felipe Louza. Roteiro: Felipe Louza. Gravação de Felipe Louza. Youtube: Youtube, 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=fM3YNIeOQds&list=PLuARAw3cqFRBLFB9VuGbwFyh_RehmBX1c&index=1. Acesso em: 21 ago. 2023.
 7. [TCOMP] Aula 2.4 - Função de transição de um Autômato Finito. Direção: Felipe Louza. Produção: Felipe Louza. Roteiro: Felipe Louza. Gravação de Felipe Louza. Youtube: Youtube, 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ix0vaWUG3sY&list=PLuARAw3cqFRBLFB9VuGbwFyh_RehmBX1c&index=9. Acesso em: 21 ago. 2023.
 8. [TCOMP] Aula 1.3 - Alfabetos, Palavras e Linguagens. Direção: Felipe Louza. Produção: Felipe Louza. Roteiro: Felipe Louza. Gravação de Felipe Louza. Youtube: Youtube, 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=vPsn8FYmTKA&list=PLuARAw3cqFRBLFB9VuGbwFyh_RehmBX1c&index=3. Acesso em: 21 ago. 2023.
 9. [TCOMP] Aula 2.1 - Autômatos Finitos Determinísticos (AFDs). Direção: Felipe Louza. Produção: Felipe Louza. Roteiro: Felipe Louza. Gravação de Felipe Louza. Youtube: Youtube, 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=0jC59NBgyxU&list=PLuARAw3cqFRBLFB9VuGbwFyh_RehmBX1c&index=6. Acesso em: 21 ago. 2023.
 10. [TCOMP] Aula 2.7 - Definição formal de um AFN. Direção: Felipe Louza. Produção: Felipe Louza. Roteiro: Felipe Louza. Gravação de Felipe Louza. Youtube: Youtube, 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=2lok-m5ogKc&list=PLuARAw3cqFRBLFB9VuGbwFyh_RehmBX1c&index=12. Acesso em: 21 ago. 2023.

11. GASES ideais. Direção: Thiago C. Correra. Produção: Thiago C. Correra. Roteiro: Felipe Louza. Gravação de Thiago C. Correra. Youtube: Youtube, 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=wPTIB15VRjI&list=PLai6Q84hMEQ0gSnh3Gv_ASTmmQpxOdV9n&index=1. Acesso em: 21 ago. 2023.
12. NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Os Principios da Dinâmica: 4.4 - Discussão da 2ª Lei. *In*: CURSO de Física Básica 1: Mecânica. 3. ed. São Paulo: EDGARD BLUCHER LTDA, 2002. v. 4, cap. 4, p. 70-74. ISBN 85-212-0298-9.
13. NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Movimento Bidimensional. *In*: CURSO de Física Básica 1: Mecânica. 3. ed. São Paulo: EDGARD BLUCHER LTDA, 2002. v. 4, cap. 3, p. 40-60. ISBN 85-212-0298-9.
14. -DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Diedros. *In*: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar 10: Geometria Espacial, posição e métrica**. 2. ed. São Paulo: Gráfica Editora Hamburg Ltda, 1980. v. 10, cap. 5, p. 75-88.
15. [TCOMP] Aula 2.8 - Convertendo AFNs para AFDs. Direção: Felipe Louza. Produção: Felipe Louza. Roteiro: Felipe Louza. Gravação de Felipe Louza. Youtube: Youtube, 2002. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=koC9UzULrtg&list=PLuARAw3cqFRBLFB9VuGbwFyh_RehmBX1c&index=13&t=11s. Acesso em: 22 ago. 2023.